2017 年高三年级第三次诊断性测验

理科数学答案

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分

选择题答案：CDCA　ABCB　DADB

1.选 C.【解析】∵集合 $A=\{x|x^2-3x+2<0\}=(1,2)$，∴ $A\subseteq B$.故选 C.

2.选 D.【解析】∵ $\frac{m+i}{1-i}=\frac{(m+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{(m-1)+(m+1)i}{2}$ 为纯虚数，∴ $m=1$，故选 D.

3.选 C.【解析】∵ $a_1+a_7=a_3+a_5$，又 $a_1=2$，$a_3+a_5=10$，所以 $a_7=8$，故选 C.

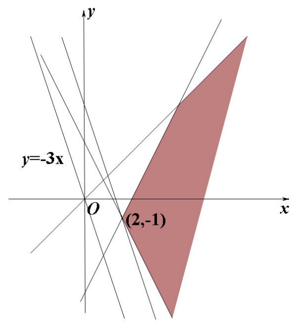
4.选 A.【解析】∵ $\log_2 a>\log_2 b\Leftrightarrow a>b>0\Rightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^a<\left(\frac{1}{3}\right)^b$，故选 A.

5.选 A.【解析】按程序框图知 n 的初值为 263，代入循环结构得 n 的输出值为 53，故选 A.

6.选 B.【解析】∵ $y=\sin^2 2x-\cos^2 2x=-\cos 4x$，是偶函数，且 $T=\frac{\pi}{2}$，故选 B.

7.选 C.【解析】可行域如图所示，当直线 $z=-3x-y$ 过点 $A(2,-1)$ 时，

$z=-3x-y$ 有最大值，最大值为 -5，故选 C.



8.选 B.【解析】∵ $x,y\in\mathbf{R},x^2+y^2+xy=315$，

∴ $x^2+y^2=315-xy$，$315-xy\ge 2xy$，∴ $xy\le 105$，

∴ $x^2+y^2-xy=315-2xy\ge 315-210=105$.故选 B.

9.选 D.【解析】根据三视图可得该几何体为一长方体和半个圆柱结合所成，所以表面积

$S_{表面积}=1\times1\times2+1\times2\times4+\pi\times1^2+2\times\pi\times1=10+3\pi$，故选 D.

10.选 A.【解析】∵由 $|AF_1|-|AF_2|=2a$，∴ $Rt\Delta AF_1F_2$ 内切圆半径为 $\frac{|AF_2|+|F_1F_2|-|AF_1|}{2}$

$=\frac{2c-2a}{2}=c-a=(\sqrt{3}-1)a\Rightarrow c=\sqrt{3}a$，∴离心率 $e=\sqrt{3}$，故选 A.

11.选 D.【解析】设球心到截面距离为 d，截面圆半径为 r，连结 OA,OC,OM，由

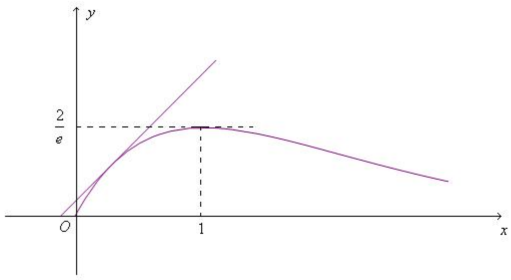
$V_{O-ACM}=V_{M-AOC}$，即 $\frac{1}{3}S_{\Delta ACM}\cdot d=\frac{\sqrt{2}}{3}S_{\Delta AOC}$，∴ $d=\frac{\sqrt{6}}{3}$，又 $d^2+r^2=1$，∴ $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以截面的面积为 $\frac{\pi}{3}$，故选 D.

12.选 B.【解析】令 $f(x)=\dfrac{2x}{e^x}\ (x>0)$，依题意，对任意 $k>1$，当 $x>0$ 时， $y=f(x)$ 图象在直线 $y=k(x-a)$ 下方，$\because f'(x)=\dfrac{2(1-x)}{e^x}$ 列表

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\uparrow$	$\dfrac{2}{e}$	$\downarrow$

得 $y=f(x)$ 的大致图象



则当 $a>0$ 时，由图象知不成立；

当 $a=0$ 时，$\because f'(0)=2$，$\therefore$ 当 $1<k<2$ 时不成立；

当 $a=-1$ 时，设 $y=k_0(x+1)$ 与 $y=f(x)$ 相切于点 $(x_0,f(x_0))$，

则 $k_0=\dfrac{2(1-x_0)}{e^{x_0}}=\dfrac{f(x_0)}{x_0+1}\Leftrightarrow 1-x_0^2=x_0$，解得 $x_0=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\in(0,1)$，

$\therefore k_0=\dfrac{3-\sqrt{5}}{e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}<\dfrac{1}{\sqrt{e}}<1$，故成立，$\therefore$ 当 $a\in\mathbf{Z}$ 时，$a_{\max}=-1$，故选 B.

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分.

13.填 $\dfrac{3}{4}$.【解析】$\because |2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，$\therefore(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=2$，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为单位向量，即

$4\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=2$，则 $4-4\cos\theta+1=2$，$\therefore\cos\theta=\dfrac{3}{4}$.

14.填 $\dfrac{7}{15}$.【解析】六位老师值班每天两人的排法有 $C_6^2C_4^2C_2^2=90$ 种.满足要求的排法有：第一种情况，王老师和李老师在同一天值班，则只能排在 5 月 1 号，有 $\mathrm{C}_4^2=6$ 种；第二种情况，王老师和李老师不在同一天值班，有 $\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_3^1\times3=36$ 种，故共有 42 种.因此满足此

要求的概率 $P=\dfrac{42}{90}=\dfrac{7}{15}$.

15.填 3.【解析】由于点 C 为抛物线的焦点，则 $|PC|$ 等于点 P 到抛物线准线 $x=-2$ 的距离 d.

又圆心 C 到抛物线准线的距离为 4，则 $|PQ|+|PC|=|PQ|+d\ge 3$，当点 P 为原点，Q 为 $(1,0)$ 时取等号，故 $|PQ|+|PC|$ 的最小值为 3.

16.填 3.【解析】$\because f(-x)=-f(x)$，又$\because f\left(\dfrac{3}{2}-x\right)=f(x)$，$\therefore f\left(\dfrac{3}{2}-x\right)=-f(-x)$，

$\therefore f(3+x)=f\left[\dfrac{3}{2}-\left(-\dfrac{3}{2}-x\right)\right]=-f\left(\dfrac{3}{2}+x\right)=-f\left[\dfrac{3}{2}-(-x)\right]=-f(-x)=f(x)$，

$\therefore f(x)$ 是以 3 为周期的周期函数.

$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=-1$，且 $S_n=2a_n+n$，$\therefore a_1=-1$，$\therefore a_5=-31, a_6=-63$，

$\therefore f(a_5)+f(a_6)=f(-31)+f(-63)=f(2)+f(0)=f(2)=-f(-2)=3$.

三、解答题：第 17~21 题每题 12 分，解答应在答卷的相应各题中写出文字说明，说明过程或演算步骤.

17.（12 分）

（I）由已知，得 $(2a+b)\cdot\dfrac{a}{2R}+(2b+a)\cdot\dfrac{b}{2R}=2c\cdot\dfrac{c}{2R}$，即 $a^2+b^2-c^2=-ab$，

$\therefore \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\dfrac{1}{2}$，$\therefore C=\dfrac{2\pi}{3}$； …6 分

（II）$\because c=\sqrt{3}$，$\therefore \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，$\therefore a=2\sin A, b=2\sin B$，

设周长为 l，则 $l=a+b+c=2\sin A+2\sin B+\sqrt{3}=2\sin A+2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-A\right)+\sqrt{3}$

$=2\sin A+2\sin\dfrac{\pi}{3}\cos A+2\cos\dfrac{\pi}{3}\sin A+\sqrt{3}=\sin A+\sqrt{3}\cos A+\sqrt{3}$

$=2\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}$，

$\because 0<A<\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore 2\sqrt{3}<2\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\le 2+\sqrt{3}$，

$\therefore \Delta ABC$ 周长的最大值为 $2+\sqrt{3}$. …12 分

18.（12 分）

（I）分别取 AC, AC_1 的中点 O, F，连结 OB, OF, EF，则 $OF \underline{\underline{//}} BE$， $\therefore OB // EF$，

$\because ABC - A_1B_1C_1$ 是直三棱柱， ABC 是正三角形， O 是 AC 的中点，

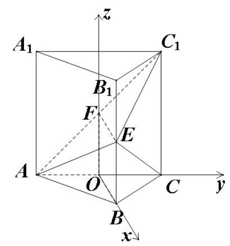
$\therefore OB \perp$ 面ACC_1A_1，$\therefore EF \perp$ 平面 ACC_1A_1 $\therefore$平面 $AEC_1 \perp$ 平面 AA_1C_1C …6 分

（II）建立如图 $O - xyz$ 空间直角坐标系，设 $AA_1 = AB = 2$，则 $A(0,-1,0), C(0,1,0), E(\sqrt{3},0,1)$，

$C_1(0,1,2)$，$\overrightarrow{AC} = (0,2,0), \overrightarrow{AC_1} = (0,2,2), \overrightarrow{AE} = (\sqrt{3},1,1)$，

设平面 AEC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,平面 AEC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$，

则有 $\begin{cases} \boldsymbol{n}_1 \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \boldsymbol{n}_1 \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \end{cases}$，$\begin{cases} \boldsymbol{n}_2 \cdot \overrightarrow{AC_1} = 0 \\ \boldsymbol{n}_2 \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \end{cases}$，得 $\boldsymbol{n}_1 = (1,0,-\sqrt{3})$，$\boldsymbol{n}_2 = (0,1,-1)$



设二面角 $C - AE - C_1$ 的平面角为θ，则 $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$，

$\therefore$二面角 $C - AE - C_1$ 的平面角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. …12 分

19.（12 分）

（I）根据残差分析，把 $x = 80$ 代入 $\hat{y}^{(1)} = 0.24x - 8.81$ 得 $\hat{y}^{(1)} = 10.39$，

$10 - 10.39 = -0.39$，所以表中空格内的值为 -0.39. …4 分

（II）模型①残差的绝对值的和为 $0.41 + 0.01 + 0.39 + 1.21 + 0.19 + 0.41 = 2.62$，

模型②残差的绝对值的和为 $0.36 + 0.07 + 0.12 + 1.69 + 0.34 + 1.12 = 3.7$，

$2.62 < 3.7$，所以模型①的拟合效果比较好，选择模型①. …8 分

（III）残差大于 $1kg$ 的样本点被剔除后，剩余的数据如下表

身高 $x(cm)$	60	70	80	100	110
体重 $y(kg)$	6	8	10	15	18
$\hat{e}^{(1)}$	0.41	0.01	-0.39	-0.19	0.41

由公式：$\hat{b} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}, \hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{x}$.得回归方程为 $y = 0.24x - 8.76$. …12 分

20.(12 分)

（I）设 $P(m,n)$，直线 PM：$y-n=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-m)$，令 $y=0$，得 $M\left(m-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}n,0\right)$，

直线 PN：$y-n=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-m)$，令 $y=0$，得 $N\left(m+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}n,0\right)$，

$\therefore \overrightarrow{OM}^2+\overrightarrow{ON}^2=\left(m-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}n\right)^2+\left(m+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}n\right)^2=2m^2+\dfrac{8n^2}{3}=8\Rightarrow\dfrac{m^2}{4}+\dfrac{n^2}{3}=1$，

$\therefore$ 曲线 E 的方程是 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$； …6 分

（Ⅱ）$\because AB//CD$，设 $\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{QC}$，$\overrightarrow{BQ}=\lambda\overrightarrow{QD}$，$(\lambda>0)$，$A(x_A,y_A),B(x_B,y_B)$，

$C(x_C,y_C),D(x_D,y_D)$，则 $(1-x_A,1-y_A)=\lambda(x_C-1,y_C-1)$，

即 $x_A=1+\lambda-\lambda x_C$，$y_A=1+\lambda-\lambda y_C$ ①，同理 $x_B=1+\lambda-\lambda x_D$，$y_B=1+\lambda-\lambda y_D$ ②

将 $A(x_A,y_A),B(x_B,y_B)$，代入椭圆方程得 $\begin{cases}\dfrac{x_A^2}{4}+\dfrac{y_A^2}{3}=1\\ \dfrac{x_B^2}{4}+\dfrac{y_B^2}{3}=1\end{cases}$，

化简得 $3(x_A+x_B)(x_A-x_B)=-4(y_A+y_B)(y_A-y_B)$ ③

把①②代入③，得

$3(2+2\lambda)(x_C-x_D)-3\lambda(x_C+x_D)(x_C-x_D)=-4(2+2\lambda)(y_C-y_D)+4\lambda(2+2\lambda)(y_C+y_D)(y_C-y_D)$

将 $C(x_C,y_C),D(x_D,y_D)$，代入椭圆方程，同理得

$3(x_C+x_D)(x_C-x_D)=-4(y_C+y_D)(y_C-y_D)$ 代入上式得 $3(x_C-x_D)=-4(y_C-y_D)$，

即 $\dfrac{y_C-y_D}{x_C-x_D}=-\dfrac{3}{4}$，　　$\therefore$ 直线 AB 的斜率为定值 $-\dfrac{3}{4}$. …12 分

21.（12 分）

（I）$f'(x)=2(x-1)(\ln x+a)\ (x>0)$，

①当 $a=0$ 时，$f'(x)=2(x-1)\ln x$，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，当 $x=1$ 时，$f'(x)=0$，$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增

②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x_1=1$，$x_2=e^{-a}$，此时 $e^{-a}<1$，

易知 $f(x)$ 在 $\left(0,e^{-a}\right)$ 递增，$\left(e^{-a},1\right)$ 递减，$(1,+\infty)$ 递增

③当 $a<0$ 时，$e^{-a}>1$，易知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 递增，$\left(1,e^{-a}\right)$ 递减，$\left(e^{-a},+\infty\right)$ 递增…4 分

（II）当 $a<-2$ 时，由（I）可知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增，$\left(1,e^{-a}\right)$ 上递减，$\left(e^{-a},+\infty\right)$ 上递增，

且 $f(1)=a-\dfrac{1}{2}+2(1-a)+a=\dfrac{3}{2}>0$，将 $x=e^{-a}$ 代入 $f(x)$，

得 $f(x)=f\left(e^{-a}\right)=\left(x^2-2x\right)(-a)+\left(a-\dfrac{1}{2}\right)x^2+2(1-a)x+a=-\dfrac{1}{2}(x-2)^2+a+2$

$\because a<-2$，$\therefore f\left(e^{-a}\right)<0$，

下面证明 当 $x\in(0,1)$ 时存在 x_0，使 $f(x_0)<0$，

首先，由不等式 $\ln x<x-1$，$\therefore \ln\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$，$\therefore -\ln x<\dfrac{1-x}{x}$，$\therefore \ln x>\dfrac{x-1}{x}$，

考虑到 $x^2-2x=x(x-2)<0$，

$\therefore f(x)=\left(x^2-2x\right)\ln x+\left(a-\dfrac{1}{2}\right)x^2+2(1-a)x+a<\left(x^2-2x\right)\cdot\dfrac{x-1}{x}+\left(a-\dfrac{1}{2}\right)x^2+$

$+2(1-a)x+a=\left(a+\dfrac{1}{2}\right)(x-1)^2+\dfrac{3}{2}$，

再令 $\left(a+\dfrac{1}{2}\right)(x-1)^2+\dfrac{3}{2}=0$，可解出一个根为 $x=1-\sqrt{\dfrac{-3}{2a+1}}$，

$\because a<-2$，$\therefore 0<\dfrac{-3}{2a+1}<1$，$\therefore 0<1-\sqrt{\dfrac{-3}{2a+1}}<1$，就取 $x_0=1-\sqrt{\dfrac{-3}{2a+1}}$，$x_0\in(0,1)$，

则有 $f(x_0)<0$，由零点存在定理及函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上的单调性，可知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有唯一的一个零点.

由 $f(1)>0, f\left(e^{-a}\right)<0$，及 $f(x)$ 的单调性，可知 $f(x)$ 在 $\left(1,e^{-a}\right)$ 上有唯一零点.

下面证明在 $x\in\left(e^{-a},+\infty\right)$ 上，存在 x_1，使 $f(x_1)>0$，就取 $x_1=e^{-a+\frac{1}{2}}$，则 $x_1>e^{-a}$，

$\therefore f(x_1)=\left(x_1^2-2x_1\right)\left(-a+\dfrac{1}{2}\right)+\left(a-\dfrac{1}{2}\right)x_1^2+2(1-a)x_1+a=x_1+a>e^{-a}+a$，

由不等式 $e^x>x+1$，则 $e^{-a}+a>(-a+1)+a>0$，即 $f(x_1)>0$.

根据零点存在性定理及函数单调性知 $f(x)$ 在 $\left(e^{-a},+\infty\right)$ 上有一个零点.

综上可知，$f(x)$当$a<-2$时，共有3个零点.　　　　　　　　　　　　　　　　…12分

请考生在第22、23题中任选一题作答，并将所选的题号下的"○"涂黑．如果多做，则按所做的第一题记分，满分10分．

22.(10分)

（I）直线l是过定点$A(0,1)$，倾斜角在$\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$内的一条直线，

圆C的方程为$(x-1)^2+y^2=1$，$\therefore$当$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$时，直线l与圆C有1个公共点；

当$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$时，直线$l$与圆$C$有2个交点.　　　　　　　　　　　　…5分

（II）依题意，点P在以OA为直径的圆上，可得轨迹极坐标方程为$\rho=\sin\theta\ \left(0\le\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$，

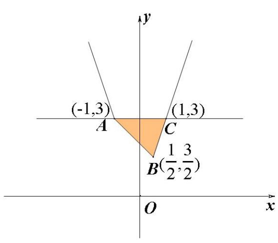
联立$\begin{cases}\rho=2\cos\theta\\ \rho=\sin\theta\ \left(0\le\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$，得$\rho=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore$ 点P的轨迹与圆C相交所得弦长是$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.　　　　　　　　　　…10分

23.（10分）

（I）$a=1$时，$f(x)=|2x-1|+|x+1|=\begin{cases}-3x & (x<-1)\\ 2-x & \left(-1\le x<\dfrac{1}{2}\right)\\ 3x & \left(x\ge\dfrac{1}{2}\right)\end{cases}$，

其图象如图所示，



易知，围成区域的面积为$\dfrac{3}{2}$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　…5分

（II）当$-a>\frac{1}{2}$，即$a<-\frac{1}{2}$时，$f(x)=\begin{cases}-3x-a+1 & \left(x<\frac{1}{2}\right)\\ x-a-1 & \left(\frac{1}{2}\le x<-a\right)\\ 3x+a-1 & (x\ge -a)\end{cases}$，

$\therefore f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-a-1$；又$f(x)_{\min}=1\Rightarrow\frac{1}{2}-a-1=1\Rightarrow a=-\frac{3}{2}$

当$-a\le\frac{1}{2}$，即$a\ge-\frac{1}{2}$时，$f(x)=\begin{cases}-3x-a+1 & (x<-a)\\ -x+a+1 & \left(-a\le x<\frac{1}{2}\right)\\ 3x+a-1 & \left(x\ge\frac{1}{2}\right)\end{cases}$，

$\therefore f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\left|\frac{1}{2}+a\right|=\frac{1}{2}+a=1\Rightarrow a=\frac{1}{2}$.

$\therefore a=-\frac{3}{2}$或$a=\frac{1}{2}$. …10 分