乌鲁木齐地区2017年高三年级第二次诊断性测验

理科数学试题参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分

选择题答案：DDCA　DABA　CCBB

1．选D.【解析】$\because M=\{1,2\}$，$N=(-2,2)$，$\therefore M\cap N=\{1\}$．故选D.

2．选D.【解析】$z=\dfrac{(1-2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}i$，在复平面上对应的点为$\left(\dfrac{4}{5},-\dfrac{3}{5}\right)$，故选D.

3．选C.【解析】$\because f(2)=4$，即$a^2=4,a=\pm 2$，又$\because a$是底数，$\therefore a=-2$舍去，$\therefore a=2$，

$\therefore f(-2)=\log_2 8=3$，故选C.

4．选A.【解析】执行程序框图，第一次循环$S=4,k=2$，第二次循环$S=11,k=3$，第三次循环$S=26,k=4$，结束循环，所以判断框内应填$k>3$?，故选A.

5．选D.【解析】根据线面，面面平行垂直的性质，只有D正确，故选D.

6．选A.【解析】由$(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\perp(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$得$(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$，即$8+5\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-3=0$，$\therefore$

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$，$\therefore \cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=-\dfrac{1}{2}$，所以$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\dfrac{2\pi}{3}$．故选A.

7．选B.【解析】由题意可知，该几何体由底面边长为2，高为2的正三棱柱，和底面边长为1，高为1的两个正三棱柱组成，$V=\dfrac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}\times 2+\dfrac{1}{2}\times 1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 1=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$，故选B.

8．选A.【解析】把函数$y=\sin(x+\varphi)$的图像上各点的横坐标缩短到原来的$\dfrac{1}{2}$（纵坐标不变），得到$y=\sin(2x+\varphi)$，再向右平移$\dfrac{\pi}{3}$个单位，得到$y=\sin\left(2x-\dfrac{2\pi}{3}+\phi\right)$的图象关于$y$轴对称，所以$-\dfrac{2\pi}{3}+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$，$\varphi$可以取$\dfrac{\pi}{6}$，故选A.

9．选C.【解析】在ΔABC中$A<B<C\Leftrightarrow a<b<c\Leftrightarrow \sin A<\sin B<\sin C$

$\Leftrightarrow \sin^2 A<\sin^2 B<\sin^2 C\Leftrightarrow 1-2\sin^2 A>1-2\sin^2 B>1-2\sin^2 C$

$\Leftrightarrow \cos 2A>\cos 2B>\cos 2C$，故选C.

10．选 C．【解析】$\because \cos A=-\frac{\sqrt{10}}{10}$ $\therefore \sin A=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\sin C=\sin\left(A+B\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}$，由

$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A},BC=1$，得 $AB=\frac{\sqrt{2}}{3}$，$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin B=\frac{1}{6}$，设 BC 边上的高为 h，$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot h=\frac{1}{6}$，$\therefore h=\frac{1}{3}$，故选 C.

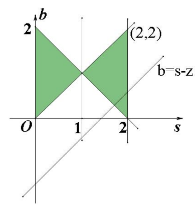
11．选 B.【解析】不妨取右焦点，根据题意 P 点坐标为 $\left(\frac{c}{2},\frac{\sqrt{3}c}{2}\right)$，代入双曲线方程得

$\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2}{a^2}-\frac{\left(\frac{\sqrt{3}c}{2}\right)^2}{b^2}=1$，即 $\frac{c^2}{a^2}-\frac{3c^2}{c^2-a^2}=4$，得 $e^2=4\pm 2\sqrt{3}$，又 $e>1$，$\therefore e=\sqrt{3}+1$，故选 B.

12．选 B.【解析】由已知 $y=f\left(x\right)$ 的图象关于点 $\left(0,0\right)$ 中心对称，即 $f\left(x\right)$ 是奇函数，

$\therefore f\left(s^2-2s\right)+f\left(2b-b^2\right)\le 0\Leftrightarrow f\left(s^2-2s\right)\le f\left(b^2-2b\right)\Leftrightarrow s^2-2s\ge b^2-2b$

$\Leftrightarrow\left|s-1\right|\ge\left|b-1\right|$，又 $0\le s\le 2$，$\therefore\begin{cases}0\le s\le 1\\ s\le b\le 2-s\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1\le s\le 2\\ 2-s\le b\le s\end{cases}$，



建立 sOb 坐标系如图，设 $s-b=z$，则 $b=s-z$，

可知直线 $b=s-z$ 过点 $\left(2,0\right)$ 时，z 取得最大值 2，在过点 $\left(0,2\right)$ 时，

z 取得最小值 -2，$-2\le z\le 2$，故选 B.

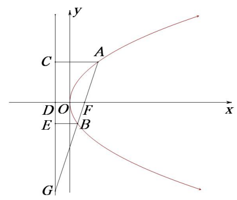
二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分.

13．填 2．【解析】$T_{r+1}=C_7^r\left(ax^3\right)^{7-r}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=C_7^r a^{7-r}x^{21-\frac{7}{2}r}$，常数项 x 的次数为 0，即

$21-\frac{7}{2}r=0,r=6$，所以 $C_7^6 a^{7-6}=14$，$\therefore a=2$.

14．填 2．【解析】$\because 4=2^x+4^y\ge 2\sqrt{2^x\times 4^y}=2\sqrt{2^{x+2y}}$ $\therefore 2^{x+2y}\le 4$，

即 $x+2y\le 2$，所以 $x+2y$ 的最大值是 2.



15．填 $\frac{12}{5}$.【解析】如图，延长 AB 交抛物线的准线于 G，过 A,B 两点作准线的垂线，垂足为 C,E，准线交 x 轴于 D.根据题意

$\frac{|GB|}{|EB|}=\frac{|GA|}{|CA|}$, 即 $\frac{|GB|}{2}=\frac{|GB|+5}{3}$，得 $|GB|=10$，又 $\frac{|GB|}{|EB|}=\frac{|GF|}{|DF|}$，即 $\frac{10}{2}=\frac{12}{|DF|}$，

得 $|DF|=\frac{12}{5}$，$\therefore p=\frac{12}{5}$.

16．填 $1-e$.【解析】由题意得 $b\ge\ln(x+1)-ax-1$，对一切 $x>-1$ 都成立.

令 $f(x)=\ln(x+1)-ax-1$，则 $f'(x)=\frac{1}{x+1}-a$，

当 $a\le 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，不成立.

当 $a>0$ 时，$-1<x<\frac{1}{a}-1$时，$f'(x)>0,x>\frac{1}{a}-1$时，$f'(x)<0$，

$\therefore f(x)_{\max}=f\left(\frac{1}{a}-1\right)=\ln\frac{1}{a}-a\left(\frac{1}{a}-1\right)-1=a-\ln a-2$，

故 $a>0$ 时，$b\ge a-\ln a-2$，$\frac{\mathrm{b}}{a}\ge 1-\frac{\ln a}{a}-\frac{2}{a}$，

令 $h(a)=1-\frac{\ln a}{a}-\frac{2}{a}$，则 $h'(a)=\frac{1+\ln a}{a^2}$,

当 $a>\frac{1}{e}$时 $,h'(a)>0,$ 当$0<a<\frac{1}{e}$时 $,h'(a)<0,$

$\therefore h'(a)_{\min}=h\left(\frac{1}{e}\right)=1-e\ln\frac{1}{e}-2e=1-e$，$\therefore\frac{b}{a}$ 的最小值是 $1-e$.

三、解答题：第 17~21 题每题 12 分，解答应在答卷的相应各题中写出文字说明，说明过程或演算步骤.

17.（12 分）

（Ⅰ）由已知：$a_{2n-1}=a_1+2(n-1)=2n-1$，　$a_{2n}=a_2\times 3^{n-1}=2\times 3^{n-1}$

$\therefore$ $a_3-a_6+a_9-a_{12}+a_{15}=3a_9-a_6-a_{12}=3\times 9-2\times 3^2-2\times 3^5=-477$　…6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $a_n>0$，$\therefore\{a_n\}$ 单调递增，

$S_{2n}=a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}+a_2+a_4+\cdots+a_{2n}=n^2+3^n-1$

$S_{12}=6^2+3^6-1=764$；$S_{13}=S_{12}+a_{13}=777$；$S_{14}=7^2+3^7-1=2235$

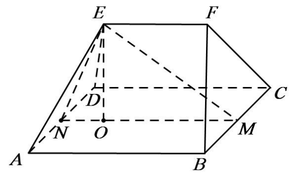
则当 $n\le 13$ 时，$S_n<2017$，$n\ge 14$ 时，$S_n>2017$，$\therefore n$ 的最小值为 14　…12 分

18.（12 分）

（Ⅰ）取 AD 的中点 N, 连结 NM,NE, 则 $AD\perp NM,AD\perp NE$，

$\therefore AD \perp$ 平面 NME，$\therefore AD \perp ME$，过 E 点，作 $EO \perp NM$ 于 O，根据题意得，

$NO = 1, OM = 3, NE = 2$，$\therefore OE = \sqrt{3}, EM = 2\sqrt{3}$，



$\therefore \Delta ENM$ 是直角三角形，$\therefore NE \perp ME$

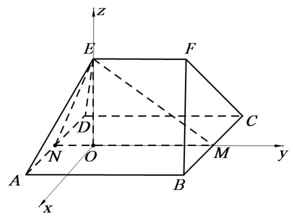
$\therefore ME \perp$ 面ADE …6 分

（Ⅱ）如图建立空间直角坐标系$O-xyz$，根据题意得，

$A(2,-1,0), B(2,3,0), D(-2,-1,0), E(0,0,\sqrt{3}), M(0,3,0)$

设平面 BAE 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1 = (x,y,z)$，由 $\overrightarrow{AB} = (0,4,0), \overrightarrow{AE} = (-2,1,\sqrt{3})$

$\begin{cases} 4y = 0 \\ -2x + y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases}$，取 $z = 2$，得 $\boldsymbol{n}_1 = (\sqrt{3},0,2)$



由（Ⅰ）知 $\overrightarrow{ME} = (0,-3,\sqrt{3})$ 为平面 ADE 的法向量

$\therefore \cos\langle \boldsymbol{n}_1, \overrightarrow{ME} \rangle = \dfrac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \overrightarrow{ME}}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\overrightarrow{ME}|} = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$

$\therefore$二面角 $B-AE-D$ 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{7}}{7}$． …12 分

19．（12 分）

（Ⅰ）若进货量定为13（件），则“进货量不超过市场需求量”是指“销售量不小于13（件）”

相应有$13+13+8+4=38$（周），“进货量不超过市场需求量”的概率为：$\dfrac{38}{52} > 0.5$；

同理，若进货量为14（件），则“进货量不超过市场需求量”的概率为：$\dfrac{25}{52} < 0.5$；

$\therefore$“进货量不超过市场需求量”的概率大于0.5，进货量的最大值是13 …4 分

（Ⅱ）进货量定为14（件），设“平均来说今年每周的利润”为Y

若售出10件：则利润 $y = 10\times3 + 4\times(-1) = 26$；

售出11件：则利润 $y = 11\times3 + 3\times(-1) = 30$

售出12件：则利润 $y = 12\times3 + 2\times(-1) = 34$

售出13件：则利润 $y = 13\times3 + 1\times(-1) = 38$

售出14件：则利润 $y = 14\times3 = 42$

售出15件：则利润 $y = 14\times3 + 1\times2 = 44$

售出16件：则利润$y=14\times3+2\times2=46$

则Y 的分布列为：

Y	26	30	34	38	42	44	46
P	$\frac{1}{26}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$

$$E(Y)=\frac{26\times2+30\times4+34\times8+38\times13+42\times13+44\times8+46\times4}{52}=\frac{2020}{52}$$ …8分

（III）依照经验可知，只有进货量和市场需求越接近的时候，利润的期望值才越大，根据市场需求量的概率分布，我们只需考虑进货量为13,14这两种情况，

当进货量为13时，利润为Y',类似（II），可得出Y'的分布列为：

Y'	27	31	35	39	41	43	45
P	$\frac{1}{26}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$

$$E(Y')=\frac{27\times2+31\times4+35\times8+39\times13+41\times13+43\times8+45\times4}{52}=\frac{2022}{52}$$

由于$E(Y')>E(Y)$，$\therefore$今年的周进货量定为13件比较合适. …12分

20.（12分）

（I）依题意有$\begin{cases}\frac{1}{a^2}+\frac{4}{3b^2}=1\\\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}\\a^2-b^2=c^2\end{cases}$，得$a^2=3,b^2=2$，$\therefore$椭圆方程为$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$； …5分

（II）依题意直线l不垂直于x轴，由对称性，不妨设l的方程为$y=k(x+1)(k>0)$，

则直线AB的方程为$y=-\frac{1}{k}x+m$，

联立$\begin{cases}y=-\frac{1}{k}x+m\\\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$，得$\left(2+\frac{3}{k^2}\right)x^2-\frac{6m}{k}x+3m^2-6=0$

易知$\Delta>0$，得$\frac{36m^2}{k^2}-4\times3\left(2+\frac{3}{k^2}\right)\left(m^2-2\right)>0$，即$m^2-2-\frac{3}{k^2}<0$ …①，

设 AB 的中点为 C，则 $x_c=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{3mk}{2k^2+3}$， $y_c=-\dfrac{1}{k}x_c+m=\dfrac{2k^2m}{2k^2+3}$

点 C 在直线 l 上，$\therefore \dfrac{2k^2m}{2k^2+3}=k\left(\dfrac{3km}{2k^2+3}+1\right)$，得 $m=-2k-\dfrac{3}{k}$ $\cdots$②，

此时 $m^2-2-\dfrac{3}{k^2}=4k^2+\dfrac{6}{k^2}+4>0$ 与①式矛盾，故 $k>0$ 不成立

当直线 l 的斜率 $k=0$ 时，

设 $A\left(x_0,y_0\right)$，则 $B\left(x_0,-y_0\right)$，$\left|AB\right|=2y_0$，点 O 到 AB 的距离为 x_0，

$\therefore S_{\Delta AOB}=\dfrac{1}{2}\times 2y_0\times x_0=x_0y_0$，

又 $\dfrac{x_0^2}{3}+\dfrac{y_0^2}{2}\geq 2\sqrt{\dfrac{x_0^2}{3}\times\dfrac{y_0^2}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}x_0y_0$，$\therefore 1\geq\dfrac{\sqrt{6}}{3}x_0y_0$，$\therefore x_0y_0\leq\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

当且仅当 $\dfrac{x_0^2}{3}=\dfrac{y_0^2}{2}=\dfrac{1}{2}$ 取等号，$\therefore S_{\Delta AOB}$ 的最大值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ $\cdots$12 分

21.（12 分）

（Ⅰ）$f'\left(x\right)=\left(ax+a+1\right)e^x-\left(a+1\right)$， $\therefore$ $f'\left(0\right)=0$，又 $\because f\left(0\right)=0$，

$\therefore y=f\left(x\right)$ 在 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 处的切线方程为 $y=0$. $\cdots$4 分

（Ⅱ）（1）当 $a\geq 0$ 时，$\because x>0$，$\therefore e^x>1$，$ax+a+1>0$

$\therefore f'\left(x\right)=\left(ax+a+1\right)e^x-\left(a+1\right)>\left(ax+a+1\right)-\left(a+1\right)=ax\geq 0$，

$\therefore f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，$\therefore f\left(x\right)>f\left(0\right)=0$，符合题意

（2）当 $a\leq-\dfrac{1}{2}$ 时，$f''\left(x\right)=\left(ax+2a+1\right)e^x$， $\because a\leq-\dfrac{1}{2}$，$\therefore 2a+1\leq 0$，

而 $x>0$，$\therefore ax<0$， $\therefore ax+2a+1<0$，$\therefore\left(ax+2a+1\right)e^x<0$，$\therefore f''\left(x\right)<0$，

则 $f'\left(x\right)$ 在 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 时单调递减，$\therefore f'\left(x\right)<f'\left(0\right)=0$，

$\therefore f\left(x\right)$ 在 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 时单调递减，此时 $f\left(x\right)<f\left(0\right)=0$，不符合题意.

（3）当 $-\dfrac{1}{2}<a<0$ 时，取 $x>-\dfrac{1}{a}>0$，此时，有 $ax+1<0$，

$\because e^x>x+1\ \left(x>0\right)$，$\therefore\left(ax+1\right)e^x<\left(ax+1\right)\left(x+1\right)$ $\cdots$①

而 $\left(ax+1\right)\left(x+1\right)=ax^2+\left(a+1\right)x+1<\left(a+1\right)x+1$ $\cdots$②

由①②得$(ax+1)e^x<(a+1)x+1$，

即$f(x)=(ax+1)e^x-(a+1)x-1<0$，此时不符合题意.

综上，若$x>0$时，$f(x)>0$，a的取值范围是$[0,+\infty)$. …12分

请考生在第22、23题中任选一题作答，并将所选的题号下的“○”涂黑．如果多做，则按所做的第一题记分，满分10分．

22.（10分）

（Ⅰ）由$x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$可得圆$C$的极坐标方程为$\rho^2-2\rho\cos\theta+\dfrac{1}{2}=0$ …5分

（Ⅱ）点M的直角坐标为$(2\cos\theta, 2\sin\theta)$，

∴直线l的参数方程为$\begin{cases} x=2\cos\theta+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \\ x=2\sin\theta+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$（$t$为参数），

直线l与圆C交于A,B两点，把直线参数方程代入圆C方程得

$t^2+\sqrt{2}(2\cos\theta+2\sin\theta-1)t+\dfrac{9}{2}-4\cos\theta=0$，

$\Delta=2(2\cos\theta+2\sin\theta-1)^2-4\left(\dfrac{9}{2}-4\cos\theta\right)>0$，解得：$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{5\pi}{4}<\theta<\dfrac{3\pi}{2}$

根据直线参数方程的几何意义得$|MA|\cdot|MB|=|t_1\cdot t_2|=\left|\dfrac{9}{2}-4\cos\theta\right|$，

∴$|MA|\cdot|MB|$的取值范围是$\left(\dfrac{9}{2},\dfrac{9}{2}+2\sqrt{2}\right)$. …10分

23.（10分）

（Ⅰ）$f(x)<g(x)\Leftrightarrow|x-4|^2<|2x+1|^2\Leftrightarrow x^2+4x-5>0$，

∴不等式$f(x)<g(x)$的解集为$(-\infty,-5)\cup(1,+\infty)$ …5分

（Ⅱ）令$H(x)=2f(x)+g(x)=2|x-4|+|2x+1|=\begin{cases} 4x-7, x>4 \\ 9, -\dfrac{1}{2}\le x\le 4 \\ -4x+7, x<-\dfrac{1}{2} \end{cases}$，$G(x)=ax$，

在同一坐标系下作出$H\left(x\right),G\left(x\right)$的图象，根据题意$2f\left(x\right)+g\left(x\right)>ax$对一切实数均成立，即$H\left(x\right)$的图象恒在$G\left(x\right)$图象的上方，$\therefore -4<a<\dfrac{9}{4}$.　　　　…10分

以上各题的其他解法，限于篇幅从略，请相应评分